(28)

22/10

i) $\bar{A} = A^\circ \cup \partial A$

Απόδειξη

$X \subseteq Y \Rightarrow Y = X \cup (Y - X)$

$A^\circ \subseteq \bar{A} \Rightarrow \bar{A} = A^\circ \cup (\bar{A} - A^\circ) = A^\circ \cup \partial A$

ii) $A = A \cup \partial A$

Απόδειξη

$A \subseteq \bar{A}$

$\partial A = \bar{A} - A^\circ \subseteq \bar{A}$

$\Downarrow$

$A \cup \partial A \subseteq \bar{A}$

Αρκεί ν.δ.ο. ισχύει: κ $\bar{A} \subseteq A \cup \partial A$

$x \in \bar{A} \Rightarrow x \in A \vee x \notin A$ (αφού $A \subseteq \bar{A}$

- $x \in \bar{A} \Rightarrow x \in A \cup \partial A$
- $x \notin A \xRightarrow{A^\circ \subseteq A} x \notin A^\circ \xRightarrow{x \in \bar{A}} x \in \bar{A} - A^\circ \Rightarrow x \in \partial A \Rightarrow x \in A \cup \partial A$

άρα από (i) κ (ii) έχω: $\bar{A} = A^\circ \cup \partial A = A \cup \partial A$

Έστω $(E_1, \rho_1), \dots, (E_k, \rho_k)$, $E = \mathop{\times}_{i=1}^{k} E_i$

$E \ni x = (x_1, \dots, x_k)$

$E \ni y = (y_1, \dots, y_k)$ με $\rho(x,y) = \sqrt{\rho_1^2(x_1,y_1) + \dots + \rho_k^2(x_k,y_k)}$

- $(E, \rho) \to$ καρτεσιανός μ.χ.

$B(a_1, \frac{r}{\sqrt{k}}) \times \dots \times B(a_k, \frac{r}{\sqrt{k}}) \subseteq B(a, r)$ και

$B(a, r) \subseteq B(a_1, r_1) \times \dots \times B(a_k, r_k)$ με $r = \min\{r_1, \dots, r_k\}$

$A_1 \subseteq E_1, \dots, A_k \subseteq E_k$ τότε

$\boxed{(\mathop{\times}_{i=1}^{k} A_i)^\circ = \mathop{\times}_{i=1}^{k} A_i \quad κ \quad \overline{(\mathop{\times}_{i=1}^{k} A_i)} = \mathop{\times}_{i=1}^{k} \bar{A_i}}$

Απόδειξη

Απόδειξη

Θεωρώ x τυχόν: $(x_1,\dots,x_k)=x\in \times_{i=1}^{k} A_i^\circ \Rightarrow x_1\in A_1^\circ \wedge\dots\wedge x_k\in A_k^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow B(x_1,r_1)\times\dots\times B(x_k,r_k)\subseteq A_1\times\dots\times A_k \overset{(2)}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow B(x,r)\subseteq A_1\times\dots\times A_k$ με $r=\min\{r_1,\dots,r_k\}\Rightarrow$

$x\in(A_1\times\dots\times A_k)^\circ = \left(\times_{i=1}^{k} A_i\right)^\circ$

Θεωρώ x τυχόν: $(x_1,\dots,x_k)=x\in\left(\times_{i=1}^{k} A_i\right)^\circ \Leftrightarrow \exists r>0: B(x,r)\subseteq \times_{i=1}^{k} A_i \overset{(1)}{\Longrightarrow}$

$B(x_1,\frac{r}{\sqrt{k}})\times\dots\times B(x_k,\frac{r}{\sqrt{k}})\subseteq \times_{i=1}^{k} A_i = A_1\times\dots\times A_k \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} B(x_1,\frac{r}{\sqrt{k}})\subseteq A_1 \\ \dots\dots \\ B(x_k,\frac{r}{\sqrt{k}})\subseteq A_k\end{cases}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases} x_1\in A_1^\circ \\ \dots \\ x_k\in A_k^\circ\end{cases}\right\} \Rightarrow x=(x_1,\dots,x_k)\in A_1^\circ\times\dots\times A_k^\circ = \times_{i=1}^{k} A_i^\circ$$

Ομοίως αποδεικνύεται και το: $\overline{\left(\times_{i=1}^{k} A_i\right)} = \times_{i=1}^{k}\overline{A_i}$

$\boxed{A^\circ = A-\partial A}$ Απόδειξη 1

$x\in A-\partial A \Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin\partial A \Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin(\bar{A}-A^\circ)\Leftrightarrow$

$x\in A\wedge[x\notin\bar{A}\vee x\in A^\circ]\Leftrightarrow (x\in A\wedge x\notin\bar{A})\vee(x\in A\wedge x\in A^\circ)\Leftrightarrow$

$x\in A\wedge x\in A^\circ\Leftrightarrow x\in A\cap A^\circ = A^\circ$

Απόδειξη 2

$A-\partial A = A\cap(\partial A)^c = A\cap(\bar{A}-A^\circ)^c = A\cap[\bar{A}\cap(A^\circ)^c]^c = A\cap[(\bar{A})^c\cup A^\circ] =$

$=[A\cap(\bar{A})^c]\cup[A\cap A^\circ] = A\cap(\bar{A})^c = A\cap(A^c)^\circ \xrightarrow[\text{γιατί } A\cap A^c=\emptyset]{A\cap A^c\supseteq A\cap(A^c)^\circ} \emptyset$

$\rho(A,B)=\rho(\bar{A},B)=\rho(A,\bar{B})=\rho(\bar{A},\bar{B})$

Απόδειξη

Αρκεί ν.δ.ο. $\rho(A,B)=\rho(\bar{A},B)$.

$\rho(A,B)=\inf\{\rho(x,y): x\in A\wedge y\in B\}$ ή $\rho(A,B)=\inf_{x\in A}\rho(x,B)$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ισχύει } \{\rho(x,B): x\in A\}\subseteq\{\rho(x,B): x\in\bar{A}\} \\ K\subseteq\Lambda \Rightarrow \inf K\geq\inf\Lambda\end{array}\right\}\Rightarrow \inf\{\rho(x,B): x\in A\}\geq\inf\{\rho(x,B): x\in\bar{A}\}$$

$\Rightarrow \rho(A,B)\geq\rho(\bar{A},B)$

Αρκεί ν.δ.ο. $\rho(\bar{A},B)\geq\rho(A,B)$

Θεωρώ ε τυχόν: $\varepsilon>0$. Τότε υπάρχουν $x\in\bar{A}$ $y\in B$: $\rho(x,y)\leq\rho(\bar{A},B)+\frac{\varepsilon}{2}$

$x\in\bar{A}\Rightarrow B(x,\frac{\varepsilon}{2})\cap\neq\emptyset$. $\exists x_1\in B(x,\frac{\varepsilon}{2})\wedge x_1\in A\Rightarrow$

$\rho(A,B)\leq\rho(x_1,y)\leq\rho(x_1,x)+\rho(x,y)<\frac{\varepsilon}{2}+\rho(\bar{A},B)+\frac{\varepsilon}{2}=\rho(\bar{A},B)+\varepsilon$

$\xrightarrow{\text{παίρνοντας όρια}} \rho(A,B)\leq\rho(\bar{A},B)$

(30)

E σταθμητός δ.χ. $A \subseteq E$, A ανοιχτό, $B \subseteq E$ με B τυχόν
Ν.δ.ο. $A+B=\{x+y : x\in A \wedge y\in B\}$ ανοιχτό υποσύνολο του E
$p(x,y)=N(x-y)$

Απόδειξη

z τυχόν: $z\in A+B \Rightarrow z=x+y$, $x\in A \wedge y\in B$

$x\in A \xrightarrow{A \text{ ανοιχτό}} (\exists r>0): B(x,r)\subseteq A$ (*)

Αρκεί ν.δ.ο. $B(z,r)\subseteq A+B$

Έστω w τυχόν: $w\in B(z,r) \Leftrightarrow p(z,w)<r \Leftrightarrow p(x+y,w)<r$

$N(x+y-w)<r \Leftrightarrow N(x-(w-y))<r \Rightarrow p(x,w-y)<r$

$\Rightarrow w-y\in B(x,r) \overset{(*)}{\subseteq} A \Rightarrow w-y\in A$

$w-y\in A \wedge y\in B \Rightarrow w-y+y\in A+B \Rightarrow w\in A+B$

Ν.δ.ο. $\partial A=\emptyset \Leftrightarrow$ A ανοιχτό κ κλειστό

Απόδειξη

($\Leftarrow$) Έστω A ανοιχτό κ κλειστό $\Rightarrow A=A^\circ \wedge A=\bar{A} \Rightarrow \partial A=\bar{A}-A^\circ=A-A=\emptyset$

($\Rightarrow$) Έστω $\partial A=\emptyset \Rightarrow \partial A=\bar{A}-A^\circ=\emptyset \Rightarrow A^\circ\supseteq\bar{A} \xrightarrow{A^\circ\subseteq A\subseteq\bar{A}} A^\circ=A=\bar{A}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΙΤΙ

1) $A=[\alpha,\beta]\cap\mathbb{Q}$ με $\alpha<\beta$

Να βρεθούν τα A° κ $\bar{A}$

---

2) (E,p) μ.χ. $A\subseteq E$

$(\forall x\in A)(\exists \alpha\in A): p(x,\alpha)=p(x,A)$

Ν.δ.ο. A κλειστό

Απόδειξη